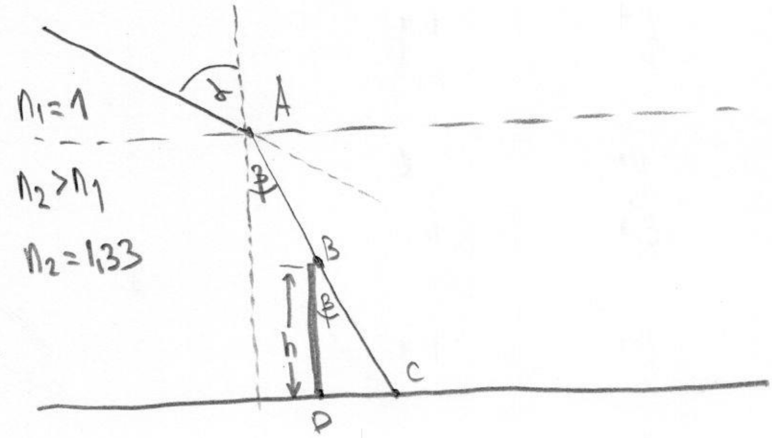
На дну језера потпуно под водом налази се вертикални стуб висине $h=4\,m$. Одредити дужину његове сенке, l, ако светлосни зраци падају на површину воде под углом $\alpha=53^\circ$. Индекс преламања воде износи 1,33.

Решење:



$$A:\quad n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha$$

$$\Delta BCD \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{l}{h}$$

$$l = h\operatorname{tg}\beta$$

$$l = h\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$l = h\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

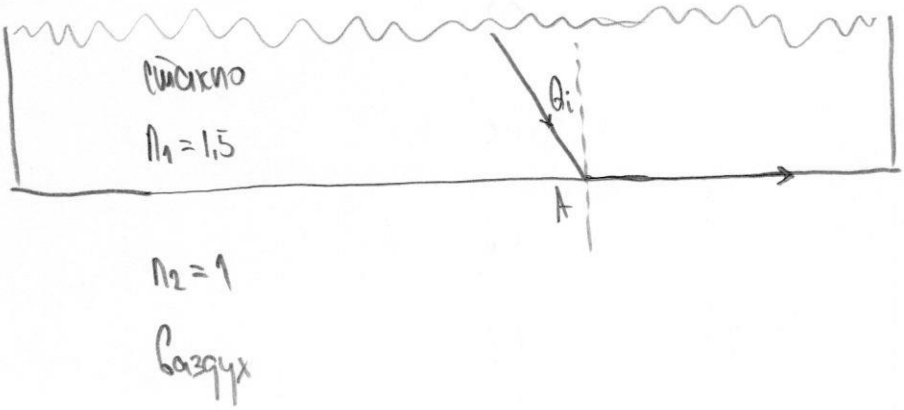
$$l = h\frac{\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha}{\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\alpha}}$$

$$l = h\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2-\sin^2\alpha}}$$

$$l \approx 3\,m$$

Одредити гранични угао упадног зрака преко којег не долази до преламања у случају када се светлосни зрак простире из стакла, индекса преламања 1,5 у ваздух.

Решење:



A: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_g$

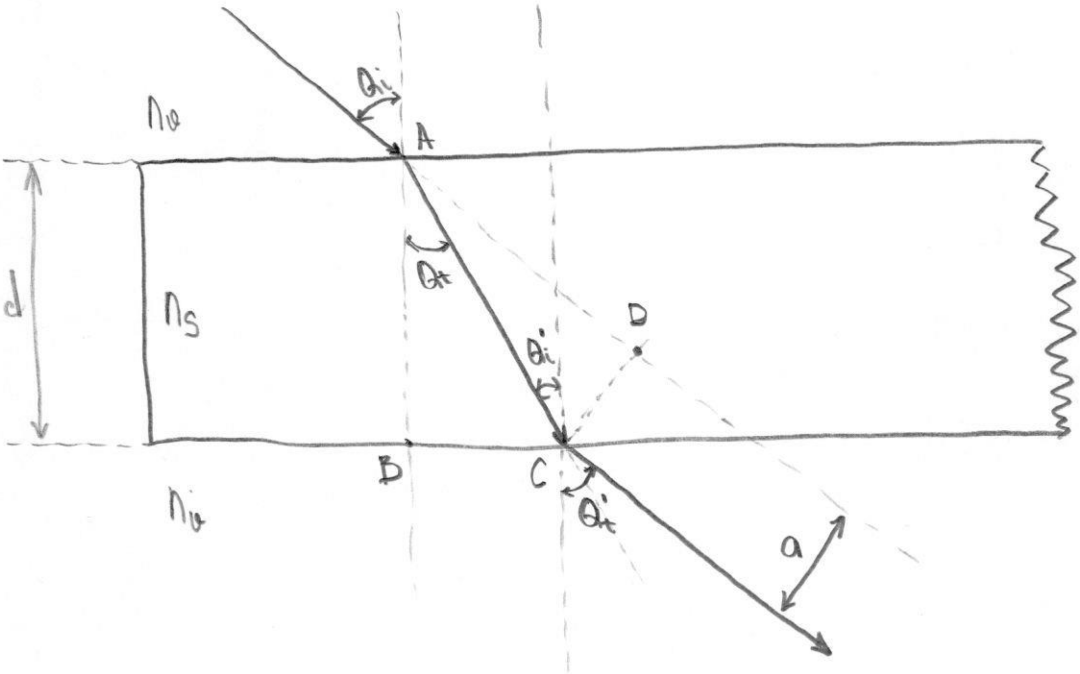
$\theta_g = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta_i = \frac{n_2}{n_1}$

$\theta_i = 41^\circ$

3.4. Показати да ће се светлосни зрак, који из ваздуха упада на план-паралелну плочу под углом θ_i, емитовати под истим углом при пролаcку кроз плочу.

Извести израз за померај зрака a, ако је дебљина плоче d.



A: $n_v \sin\theta_i = n_s \sin\theta_t$

C: $n_s \sin\theta_i' = n_v \sin\theta_t'$

Са слике: $\theta_t = \theta_i'$

$n_v \sin\theta_i = n_s \sin\theta_t = n_s \sin\theta_i' = n_v \sin\theta_t'$

$n_v \sin\theta_i = n_v \sin\theta_t'$

$\theta_i = \theta_t'$ (углови су у I квадранту)

⇓

Зраци су паралелни

ΔACD: $\measuredangle CAD = \theta_i - \theta_t$

$$\sin(\theta_i - \theta_t) = \frac{a}{\overline{AC}}$$

$$a = \overline{AC} \sin(\theta_i - \theta_t)$$

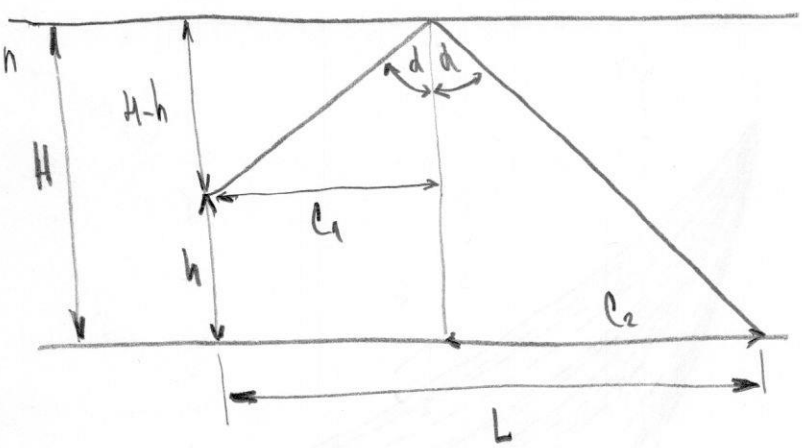
ΔABC: $$\cos\theta_t = \frac{d}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = \frac{d}{\cos\theta_t}$$

$$a = \frac{d \sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_t}$$

Ронилац стоји на дну базена. При томе су очи рониоца на висини h од дна базена. Услед тоталне рефлексије од површине воде ронилац може да, гледајући у површину воде види дно базена које је на удаљености L или већој, мерено од места на коме стоји. Индекс преламања воде је n.

Наћи дубину базена H.



$$n \sin\alpha = 1 \quad = \quad \sin\alpha = \frac{1}{n}$$

$$L = l_1 + l_2$$

$$tg\,\alpha = \frac{l_1}{H-h} \Rightarrow l_1 = (H-h)\,tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{l_2}{H} \qquad l_2 = H\,tg\,\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

$L = l_1 + l_2$

$L = (H-h)\,tg\alpha + H\,tg\alpha$

$L = H\,tg\alpha - h\,tg\alpha + H\,tg\alpha$

$L = 2H\,tg\alpha - h\,tg\alpha$

$L = (2H-h)\,tg\alpha$

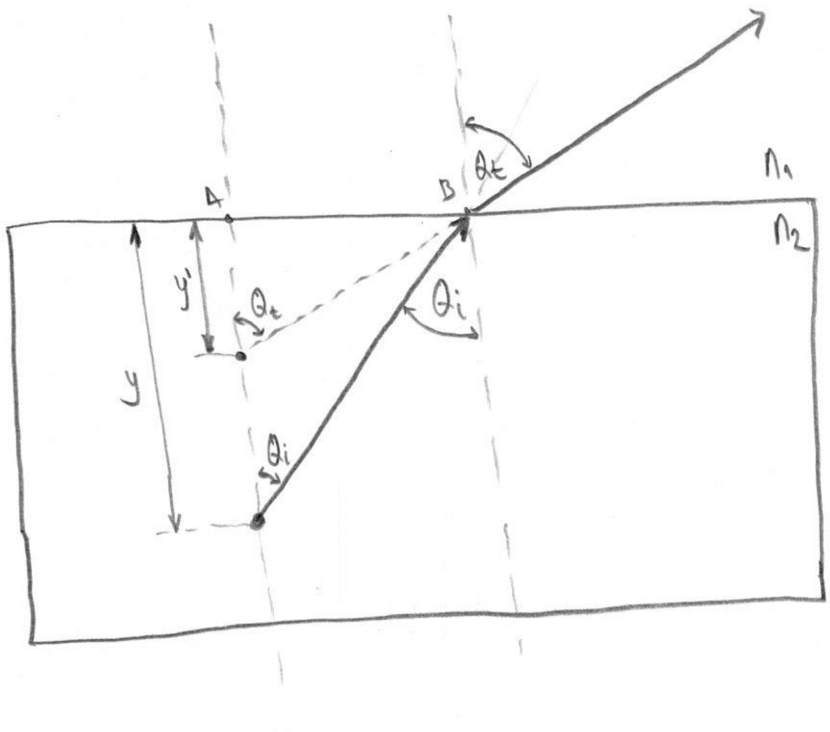
$L = (2H-h)\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

$2H - h = L\sqrt{n^2-1}$

$2H = h + L\sqrt{n^2-1}$

$H = \frac{h + L\sqrt{n^2-1}}{2}$

3.5. Нека су дате две средине индекса преламања n_1 и n_2 раздвојене равном површи. Нека се објекат налази у оптички гушћој средини на растојању y од раздвојне површине. Посматрач са друге стране разделне површине види објекат као да се налази на растојању y' од разделне површине. Изразити y' у зависности од y и индекса преламања средина, у случају када је правац под којим посматрач види објекат веома близак нормали на разделну површину.



$B: \; n_2 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_t$

$$\overline{AB} = y \, tg\theta_i = y' \, tg\theta_t$$

$$\frac{n_2 \sin\theta_i}{y \, tg\theta_i} = \frac{n_1 \sin\theta_t}{y' \, tg\theta_t}$$

$$\frac{n_2 \cos\theta_i}{y} = \frac{n_1 \cos\theta_t}{y'}$$

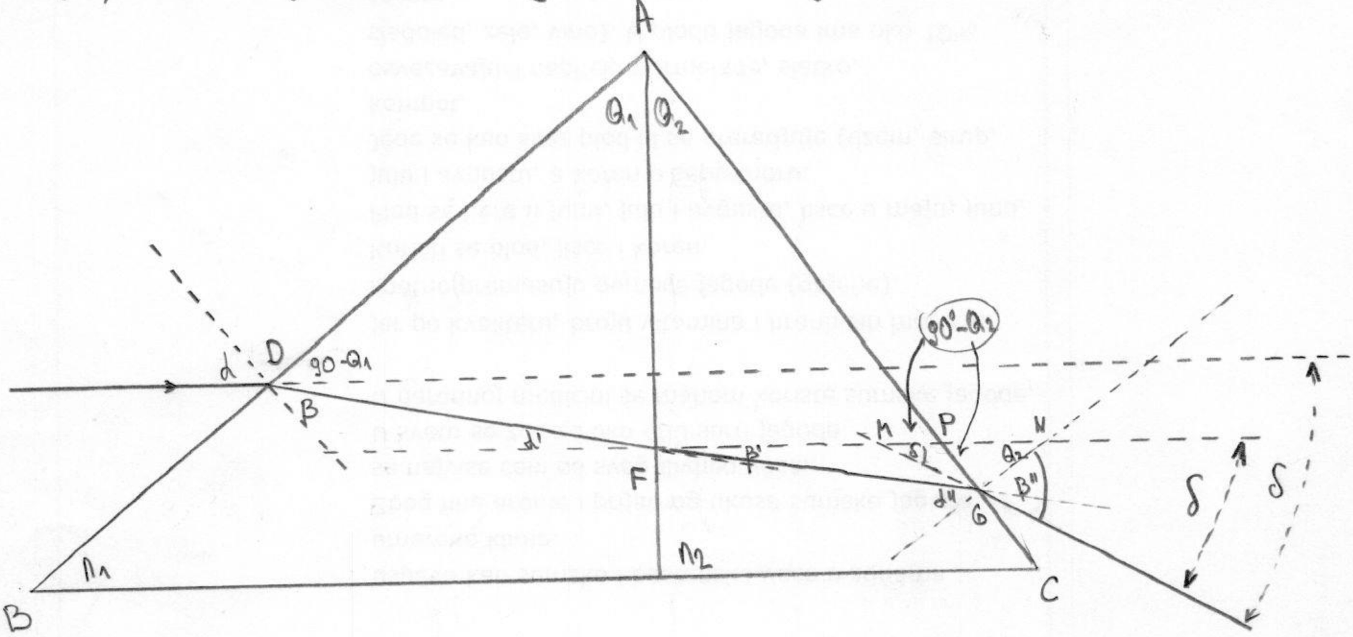
$\theta_i \to 0$

$\theta_t \to 0$

$\cos\theta_i \approx \cos\theta_t \approx 1$

$$y' = y \frac{n_1}{n_2}$$

Две правоугаоне призме са угловима $Q_1 = 45°$ и $Q_2 = 30°$ су спојене. Узан сноп светлосних зрака пада на страницу AB прве призме, паралелно са основама призми. Ако је индекс преламања прве призме $n_1 = 1{,}3$, а друге $n_2 = 1{,}5$, израчунати угао изласног зрака (δ) на страници AC, у односу на упадни зрак



$Q_1 = 45°$

$Q_2 = 30°$

$n_1 = 1{,}3$

$n_2 = 1{,}5$

$\delta = ?$

$\Delta MNG \Rightarrow \delta + \cancel{180°} - \beta'' + \measuredangle MNG = \cancel{180°}$

$\delta - \beta'' + \measuredangle MNG = 0°$

$\delta = \beta'' - \measuredangle MNG$

$\measuredangle MNG = ?$

$\Delta AFP \Rightarrow \measuredangle FPA = 90° - Q_2 = \measuredangle GPN$

$\Delta GPN \Rightarrow \measuredangle GPN + \measuredangle MNG + 90° = 180°$

$\measuredangle MNG = 90° - \measuredangle GPN$

$\measuredangle MNG = 90° - 90° + Q_2$

$\measuredangle MNG = Q_2$

$$\delta = \beta'' - \Theta_2$$

$$\Delta FHG \Rightarrow \beta' + \Theta_2 = \gamma''$$

$$\Theta_2 = \gamma'' - \beta'$$

$$\delta = \beta'' - \Theta_2$$

$$\delta = \beta'' - \gamma'' + \beta'$$

$$\delta = \beta'' + \beta' - \gamma''$$

Оружени угао у тачки D $\Rightarrow \gamma + 90^\circ + 90^\circ - \Theta_1 = 180^\circ$

$$\gamma = \Theta_1$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$\sin\gamma = n_1 \sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{n_1} = \frac{\sin 45^\circ}{1{,}3} = 0{,}544$$

$$\beta = 32{,}95^\circ$$

$$\Delta ADF = \Theta_1 + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma' = 180$$

$$\Theta_1 = \gamma' + \beta$$

$$\gamma' = \Theta_1 - \beta$$

$$\gamma' = 45^\circ - 32{,}95^\circ$$

$$\gamma' = 12{,}05^\circ$$

$n_1 \sin \alpha' = n_2 \sin \beta'$

$\sin \beta' = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha'$

$\sin \beta' = 0,1809$

$\beta' \approx 10,42^\circ$

$\Delta FPG \Rightarrow \beta' + \cancel{180^\circ} - (90^\circ - \theta_2) + 90^\circ - \alpha'' = \cancel{180^\circ}$

$\beta' - \cancel{90^\circ} + \theta_2 + \cancel{90^\circ} - \alpha'' = 0$

$\alpha'' = \beta' + \theta_2$

$\alpha'' = 10,42^\circ + 30^\circ$

$\alpha'' = 40,42^\circ$

$n_2 \sin \alpha'' = \sin \beta''$

$\sin \beta'' = 0,9725$

$\beta'' \approx 76,55^\circ$

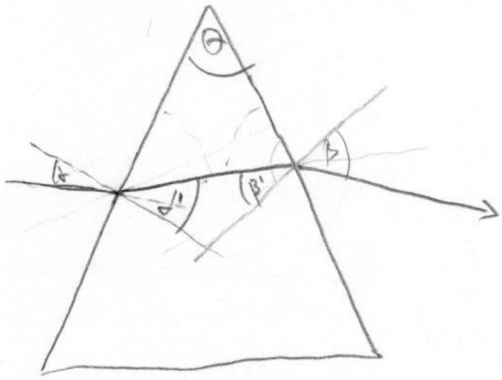
$\delta = \beta'' + \beta' - \alpha$

$\delta = 76,55^\circ + 10,42^\circ - 40,42^\circ$

$\delta = \underline{46,56^\circ}$

6

Сноп светлости пада на страницу призме под углом $\delta = 60°$. Након двоструког преламања кроз обе граничне површи светлост излази под углом $\beta = 45°$. Ако је индекс преламања призме $n = 1,5$ израчунати угао призме $\theta = ?$



$$\frac{\pi}{2} - \beta' + \frac{\pi}{2} - \delta' + \theta = 180$$

$$\cancel{180} + \theta - \delta' - \beta' = \cancel{180}$$

$$\theta = \delta' + \beta'$$

$$n_p \sin\beta' = n_v \cdot \sin\beta$$

$$n_v \sin\delta = n_p \sin\delta'$$

$n_v = 1$

$n_v = 1$

$$\sin\delta = n_p \sin\delta'$$

$$n_p \sin\beta' = \sin\beta$$

$$\sin\delta' = \frac{1}{n_p}\sin\delta$$

$$\sin\beta' = \frac{1}{n_p}\sin\beta$$

$$\delta' = \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\sin\delta\right)$$

$$\beta' = \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\sin\beta\right)$$

$$\delta' = \arcsin\left(\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\beta' = \arcsin\left(\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

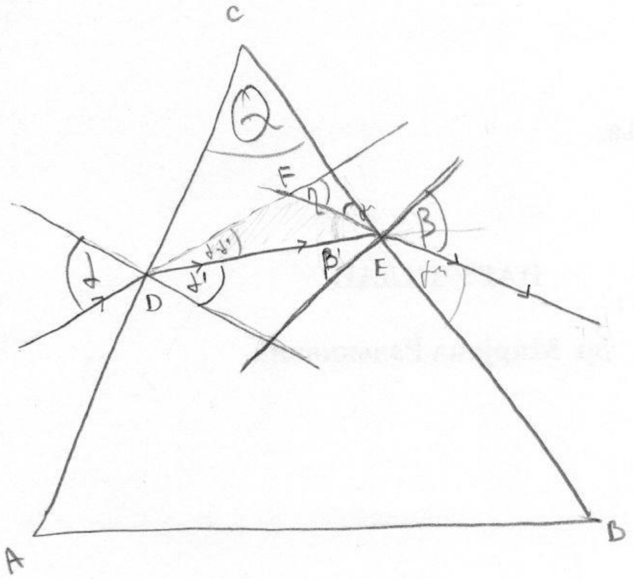
$$\delta' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 35{,}26°$$

$$\beta' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 28{,}1°$$

$$\theta = \delta' + \beta'$$

$$\theta = 35{,}26° + 28{,}1° = \underline{63{,}36°}$$

9 Одредити угао скретања светлосног зрака при проласку кроз призму индекса преламања n и угла θ, за случај малих углова призме и упадног угла светлосног зрака.



$$\Delta DEF \Rightarrow \alpha - \alpha' + 180 - \eta + \beta - \beta' = 180$$

$$\Delta CDE \Rightarrow 90 - \alpha' + 90 - \beta' + \theta = 180$$

$$\theta = \alpha' + \beta'$$

$$\alpha + \beta - \eta - \theta = 0$$

$$\eta = \alpha + \beta - \theta$$

$$n_1 \sin\alpha = n_p \sin\alpha'$$

$$n_p \sin\beta' = n_1 \sin\beta$$

$$n_p \sin\beta' = \sin\beta$$

$$\beta = \arcsin(n \sin\beta')$$

$$\beta = \arcsin(n \sin(\theta - \alpha'))$$

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\sin\alpha\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(n \sin\left(\theta - \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\sin\alpha\right)\right)\right)$$

$$\sin x \approx x$$

$$\arcsin b \approx b$$

$$\beta = n\left(\theta - \frac{1}{n}\alpha\right)$$

$$\eta = \alpha + n\left(\theta - \frac{1}{n}\alpha\right) - \theta$$

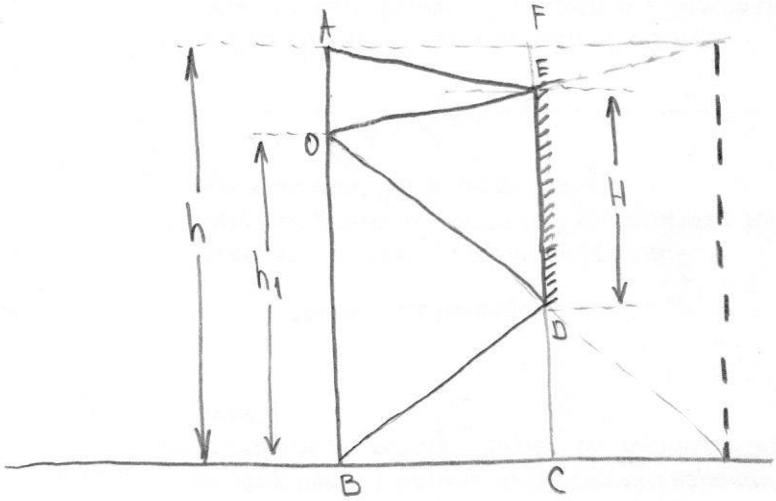
$$\eta = \cancel{\alpha} + n\theta - \cancel{\alpha} - \theta$$

$$\eta = (n-1)\theta$$

306 (такмичења)

Колику најмању висину треба да има равно огледало постављено на зиду да би у њему човек висине $h = 1,72$ m могао да види цео свој лик? Висина човекових очију је $h_1 = 1,60$ m од равни пода.

Решење:



Висина огледала H и његов положај морају бити такви да светлосни зраци из крајњих тачака A и B, после рефлексије од огледала, стигну до човекових очију у тачки O.

На основу закона одбијања:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{OB}}{2} = \frac{h_1}{2} \quad и \quad \overline{EF} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{h-h_1}{2}$$

Са слике, висина огледала се може наћи као:

$$H = \overline{DE} = h - \overline{CD} - \overline{EF}$$

$$H = h - \frac{h_1}{2} - \frac{h-h_1}{2}$$

$$H = h - \frac{h_1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}$$

$$H = \frac{h}{2} = 0{,}86\ cm$$

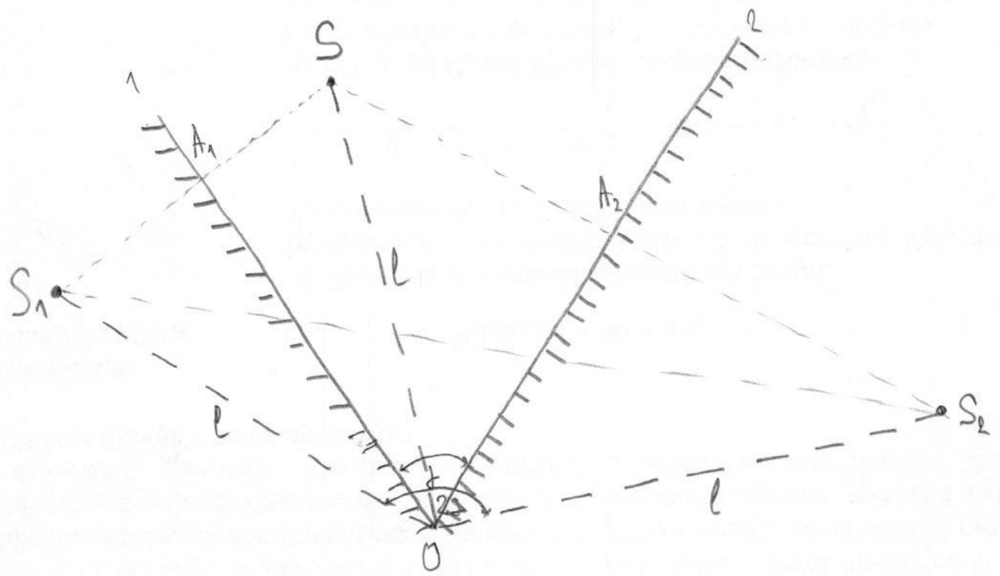
Горња ивица огледала Е треба да је на висини

$$\overline{CE} = h_1 + \overline{EF} = h_1 + \frac{h-h_1}{2} = \frac{h+h_1}{2} = 1{,}66\ m$$

305 (такмичења)

Мали предмет се налази између два равна огледала постављена под углом $\alpha = 30^\circ$, на растојању $l = 8cm$ од линије пресека огледала. На ком међусобном растојању x се налазе први имагинарни ликови предмета у огледалима?

Решење:



Имагинарни ликови предмета S_1 и S_2 се налазе на истом

удаљењу од огледала као и предмет S:

$$\overline{SA_1} = \overline{S_1A_1} \quad и \quad \overline{SA_2} = \overline{S_2A_2}$$

па су троуглови OS_1S и OS_2S једнакокраки, одакле је

$$\overline{OS_1} = \overline{OS} = l \quad и \quad \overline{OS_2} = \overline{OS} = l$$

$$\measuredangle S_1OS_2 = 2\alpha$$

$$x = l^2 + l^2 - 2ll\cos 2\alpha$$

$$x = 2l^2 - 2l^2\cos 2\alpha$$

$$x = 2l^2(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

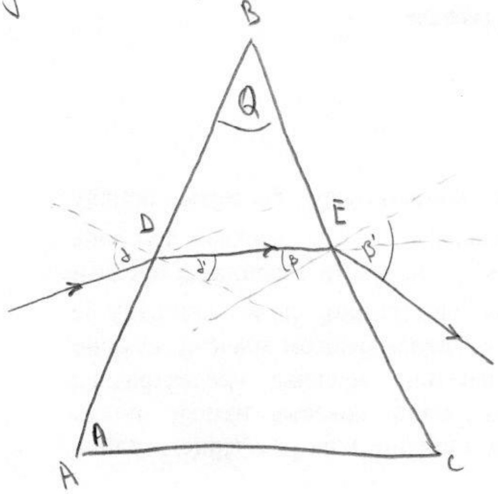
$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$x = 2l^2 \cdot 2\sin^2\alpha$$

$$x = 4l^2\sin^2\alpha$$

$$x = 8\,cm$$

Зрак светлости пада на једну страну стаклене призме индекса преламања $n=1{,}5$, под углом од 30°, као на слици. Које вредности може имати угао призме Q, како би светлосни зрак напустио призму на страници BC.



$$n \sin\beta = \sin\beta'$$

Да не би дошло до тоталне рефлексије

$$\sin\beta' \le 1$$

$$n \sin\beta = \sin\beta' \le 1$$

$$n \sin\beta \le 1$$

$$\sin\beta \le \frac{1}{n}$$

$$\beta \le \arcsin\frac{1}{n}$$

$$\Delta BDE \Rightarrow Q + (90 - \gamma') + (90 - \beta) = 180^\circ$$

$$Q + 90^\circ - \gamma' + 90^\circ - \beta = 180^\circ$$

$$Q = \gamma' + \beta$$

$$\beta = Q - \gamma'$$

$$\arcsin\frac{1}{n} \ge \beta = Q - \gamma'$$

$$Q - \gamma' \le \arcsin\frac{1}{n}$$

$$Q \le \arcsin\frac{1}{n} + \gamma'$$

$$\sin\alpha = n\sin\alpha'$$

$$n\sin\alpha' = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha' = \frac{1}{n}\sin\alpha$$

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right)$$

$$Q \leq \arcsin\frac{1}{n} + \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right)$$

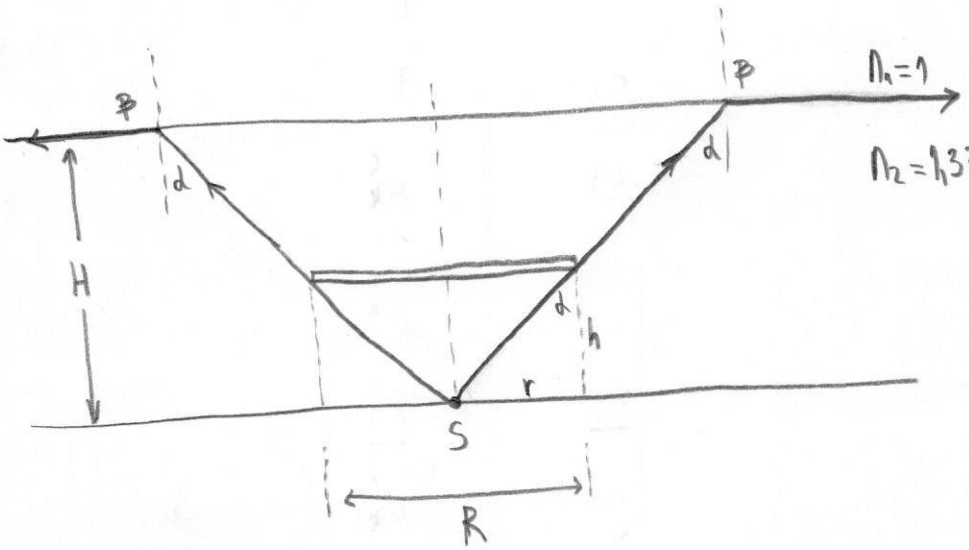
$$Q \leq \arcsin\frac{1}{1{,}5} + \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\cdot\sin 30^\circ\right)$$

$$Q \leq 41{,}81^\circ + 19{,}47^\circ$$

$$Q \leq 61{,}28^\circ$$

У води на известној дубини налази се тачкасти светлосни извор. На којој максималној висини изнад извора треба поставити кружну плочицу полупречника $r = 2cm$, тако да светлост не излази из воде?

Решење:



$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 = 1$$

$$\sin\alpha = n_2$$

$$\alpha \approx 48{,}75^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h}$$

$$h = r \operatorname{ctg}\alpha$$

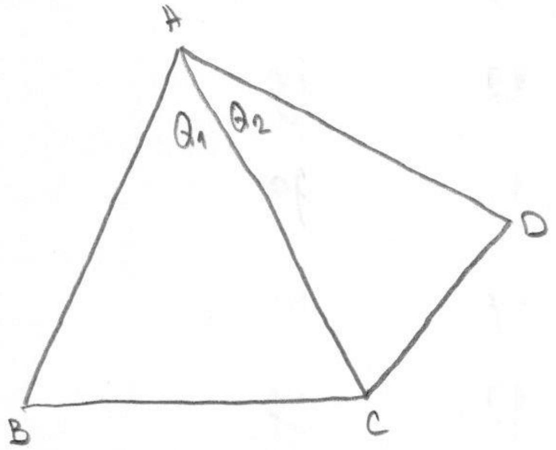
$$h = r\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$h = r\,\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$h = r\,\frac{\sqrt{1-n_2^2}}{n_2}$$

$$h \approx 1{,}75\,cm$$

Две призме од стакла индекса преламања $n_1 = 1{,}4$ и $n_2 = 1{,}6$ су међусобно постављене као на слици. Светлосни зрак пада на страницу AB прве призме и након преламања на граничним површинама AB, AC и AD излази из друге призме под углом $\beta'' = 60°$. Ако су углови призми $\theta_1 = 50°$ и $\theta_2 = 20°$, израчунати угао α под којим светлосни зрак пада на прву призму.



Решење:

$n_1 = 1{,}4$

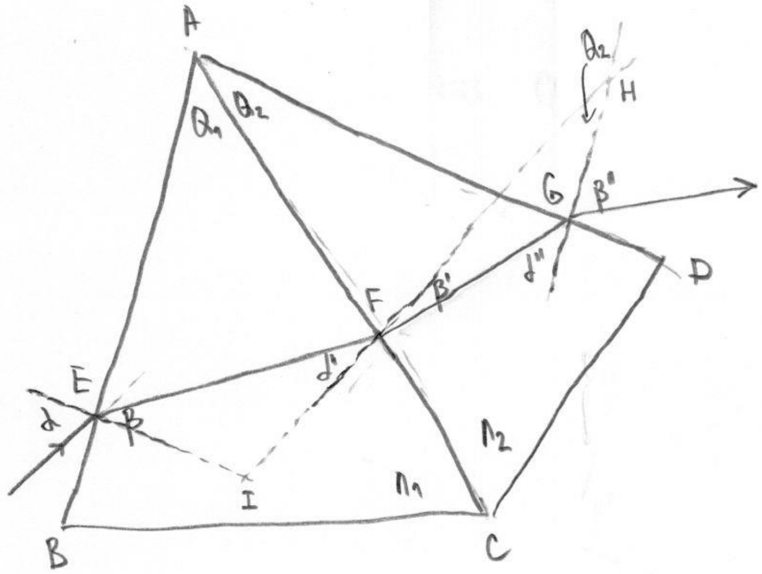
$n_2 = 1{,}6$

$\theta_1 = 50^\circ$

$\theta_2 = 20^\circ$

$\beta'' = 60^\circ$

$\alpha = ?$



G: $n_2 \sin \alpha'' = \sin \beta''$

$\sin \alpha'' = 0{,}511$

$\alpha'' = 32{,}77^\circ$

Δ FGH: $\alpha'' = \beta' + \theta_2$

$\beta' = 12{,}77^\circ$

F: $n_1 \sin \alpha' = n_2 \sin \beta'$

$\sin \alpha' = 0{,}253$

$\alpha' = 14{,}63$

Δ EFI: $\theta_1 = \beta + \alpha'$

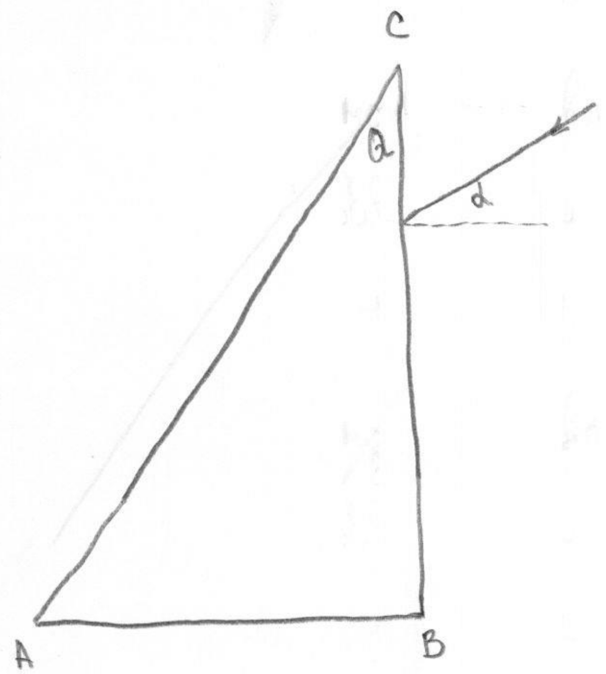
$\beta = 35{,}37$

E: $\sin \alpha = n_1 \sin \beta$

$\sin \alpha = 0{,}81$

$\alpha = 54{,}13^\circ$

На правоугаону призму угла $\theta = 28°$, пада светлосни зрак под углом од $\alpha = 35°$, као на слици. Ако је индекс преламања стакла, од којег је призма направљена $n = 1,4$, наћи угао под којим светлосни зрак излази из призме.

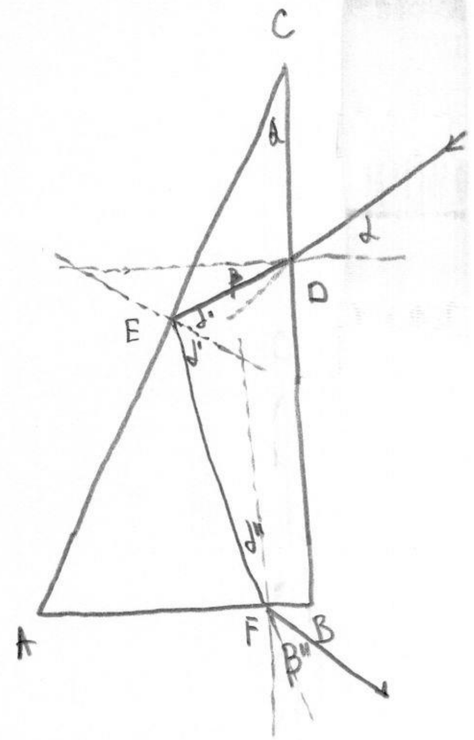


Решење:

$\alpha = 28^\circ$

$\lambda = 35^\circ$

$n = 1{,}4$



D: $\sin\lambda = n\sin\beta$

$\sin\beta \approx 0{,}41$

$\beta \approx 24{,}19^\circ$

ΔCED: $\alpha + \left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\lambda'\right) = \pi$

$\lambda' = \alpha + \beta = 52{,}19^\circ$

E: $n\sin\lambda' = \sin\beta'$

$\sin\beta' = 1{,}1$?

Не прелама се

ΔAEF: $(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \lambda') + (90^\circ - \lambda'') = 180^\circ$

$\lambda'' = 90^\circ - \alpha - \lambda'$

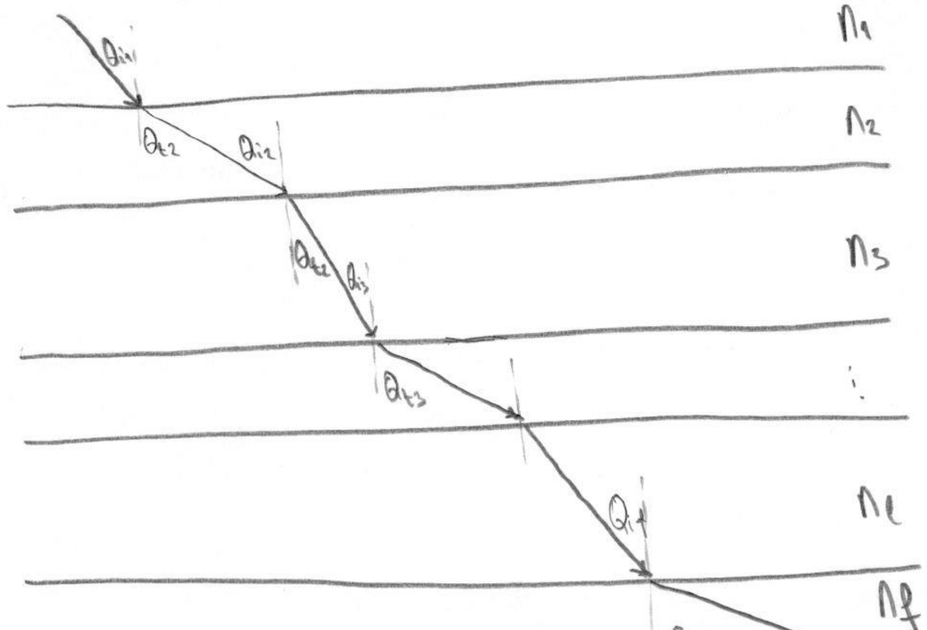
$\lambda'' = 9{,}81^\circ$

F: $n\sin\lambda'' = \sin\beta''$

$\sin\beta'' = 0{,}238$

$\beta'' = 13{,}8^\circ$

3.7. (Hecht) Нека је дат систем који се састоји од више паралелних слојева оптички провидног материјала различитих дебљина. Показати да преломни угао зрака који напушта овај систем је одређен само упадним углом и индексима преламања почетног и крајњег слоја (n_i и n_f).



$$n_1 \sin \theta_{i1} = n_2 \sin \theta_{t2}$$

$$n_2 \sin \theta_{i2} = n_3 \sin \theta_{t3}$$

$$n_3 \sin \theta_{i3} = n_4 \sin \theta_{t4}$$

$$\vdots$$

$$n_\ell \sin \theta_{if} = n_f \sin \theta_{tf}$$

$$\theta_{t2} = \theta_{i2}$$

$$\theta_{t3} = \theta_{i3}$$

$$\vdots$$

$$n_1 \sin \theta_{i1} = n_2 \sin \theta_{i2} = \ldots = n_\ell \sin \theta_{i\ell} = n_f \sin \theta_{tf}$$

$$n_1 \sin \theta_{i1} = n_2 \sin \theta_{tf}$$

У случају $n_1 = n_2 \Rightarrow \theta_{i1} = \theta_{tf}$; зраци су паралелни